Tentamen Metrische Ruimten
13 april 2010, 14:00 - 17:00 uur, Examenhal

De vragen mogen zowel in het Nederlands als in het Engels beantwoord worden.

1. We brengen in herinnering dat de co-eindige topologie op een verzameling X bestaat uit de lege verzameling $\emptyset$ samen met alle deelverzamelingen U van X waarvoor geldt dat $X \setminus U$ eindig is.
   (a) Bewijs dat de co-eindige topologie daadwerkelijk een topologie is.
   (b) Bewijs dat als X eindig is dan is de co-eindige topologie gelijk aan de discrete topologie.

2. (a) Stel dat X, Y topologische ruimtes zijn met deelruimtes $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, en dat $h : X \to Y$ een homeomorfisme is met $h(A) = B$. Bewijs dat de afbeelding $g : X \setminus A \to Y \setminus B$ geïnduceerd door h (dit betekent $g(x) = h(x)$ voor $x \in X \setminus A$) een homeomorfisme is.
   (b) Laat zien dat $\mathbb{R}$ niet homeomorf is met $\mathbb{R}^2$.

3. Laat $\mathcal{C}$ de ruimte van continue functies $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ met de sup metriek zijn.
   (a) Laat $A \subseteq [0,1]$ en beschouw de verzameling $Z_A = \{f \in \mathcal{C} : f(a) = 0 \text{ voor alle } a \in A\}$. Bewijs dat Z_A gesloten is in $\mathcal{C}$.
   (b) Laat zien dat de afbeelding $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

   continu is.

4. Veronderstel dat A en B compacte deelverzamelingen zijn van een topologische ruimte X. Laat zien dat $A \cup B$ ook compact is.